Gemengde opgaven

12 Exponenten en logaritmen

Bladzijde 246

1 **a** $g_{jaar} = 1{,}096$, dus $g_{10\ jaar} = 1{,}096^{10} \approx 2{,}501$.
De toename per 10 jaar is 150,1%.
b $g_{jaar} = 1{,}096$, dus $g_{maand} = 1{,}096^{\frac{1}{12}} \approx 1{,}008$.
De toename per maand is 0,8%.
c Los op $1{,}096^t = 2$.
Voer in $y_1 = 1{,}096^x$ en $y_2 = 2$.
Intersect geeft $x = 7{,}56...$
De hoeveelheid is na ongeveer 91 maanden verdubbeld.
d Los op $1{,}096^t = 10$.
Voer in $y_1 = 1{,}096^x$ en $y_2 = 10$.
Intersect geeft $x = 25{,}11...$
De hoeveelheid is na ongeveer 25 jaar vertienvoudigd.

2 **a** $g_{dag} = 0{,}83$, dus $g_{week} = 0{,}83^7 \approx 0{,}271$.
De afname per week is 72,9%.
b $g_{dag} = 0{,}83$, dus $g_{uur} = 0{,}83^{\frac{1}{24}} \approx 0{,}992$.
De afname per uur is 0,8%.
c Los op $0{,}83^t = \frac{1}{2}$.
Voer in $y_1 = 0{,}83^x$ en $y_2 = 0{,}5$.
Intersect geeft $x = 3{,}72...$
De hoeveelheid is na ongeveer 89 uur gehalveerd.
d Los op $0{,}83^t = \frac{1}{4}$.
Voer in $y_1 = 0{,}83^x$ en $y_2 = 0{,}25$.
Intersect geeft $x = 7{,}44...$
Na ongeveer 7,4 dagen is nog een kwart van de beginhoeveelheid over.

3 **a** $\frac{dy}{dx} = 40\,e^{0{,}6x} \cdot 0{,}6 = 24\,e^{0{,}6x}$
b $\frac{dy}{dx} = 18{,}5 \cdot e^{2x} \cdot 2 = 37\,e^{2x}$
c $\frac{dy}{dx} = 34 \cdot 5^{x^2-7} \cdot \ln(5) \cdot 2x = 68x\ln(5) \cdot 5^{x^2-7}$
d $\frac{dy}{dx} = 600 \cdot 8^{1{,}5x} \cdot \ln(8) \cdot 1{,}5 = 900\ln(8) \cdot 8^{1{,}5x}$
e $\frac{dy}{dx} = 2 + 21{,}6 \cdot \frac{1}{x+10} = 2 + \frac{21{,}6}{x+10}$
f $\frac{dy}{dx} = 0{,}4 \cdot \frac{1}{6x^2 \cdot \ln(2)} \cdot 12x = \frac{4{,}8x}{6x^2 \cdot \ln(2)} = \frac{4{,}8}{6x \cdot \ln(2)}$

4 **a** $g_{5\ dagen} = 2$ geeft $g_{dag} = 2^{\frac{1}{5}} = 1{,}148...$
Dus de oppervlakte van het meer is $20 \cdot 1{,}148...^{42} \approx 6756\ m^2$.
b Los op $20 \cdot \left(2^{\frac{1}{5}}\right)^t = 0{,}3 \cdot 6756$.
Voer in $y_1 = 20 \cdot \left(2^{\frac{1}{5}}\right)^x$ en $y_2 = 0{,}3 \cdot 6756$.
Intersect geeft $x \approx 33{,}3$.
$t = 0$ op 1 mei om 0:00 uur en $t = 30$ op 31 mei om 0:00 uur, dus $t = 33{,}3$ is op 3 juni.

5 **a** Stel $N = b \cdot g^t$.
$g_{4\ dagen} = \frac{272}{160}$, dus $g_{dag} = \left(\frac{272}{160}\right)^{\frac{1}{4}} = 1{,}1418...$

$$\left.\begin{array}{l} N = b \cdot 1{,}1418...^t \\ t = 4 \text{ en } N = 160 \end{array}\right\} b \cdot 1{,}1418...^4 = 160$$

$$b = \frac{160}{1{,}1418...^4} \approx 94$$

Dus $N = 94 \cdot 1{,}142^t$.

© Noordhoff Uitgevers bv

b Stel $P = b \cdot g^t$.
$g_{12\text{ dagen}} = 0{,}84$, dus $g_{\text{dag}} = 0{,}84^{\frac{1}{12}} \approx 0{,}986$.
$P = b \cdot g^t$ met $b = 100$ en $g = 0{,}986$ geeft $P = 100 \cdot 0{,}986^t$.
c Stel in de laatste 4 jaar is g de vermenigvuldigingsfactor per jaar.
Er geldt dan $1{,}092^6 \cdot g^4 = 1{,}85$.
Voer in $y_1 = 1{,}092^6 \cdot x^4$ en $y_2 = 1{,}85$.
Intersect geeft $x \approx 1{,}022$, dus $g \approx 1{,}022$.
Het jaarlijkse toenamepercentage voor de laatste twee jaar is 2,2%.

Bladzijde 247

6 **a** Als t toeneemt, dan neemt $9 \cdot 0{,}74^t$ af, dus $1 + 9 \cdot 0{,}74^t$ neemt af, dus $\dfrac{1500}{1 + 9 \cdot 0{,}74^t}$ neemt toe.
b Bij 1 september 2016 hoort $t = 6$.
$t = 6$ geeft $A = \dfrac{1500}{1 + 9 \cdot 0{,}74^6} \approx 605$.
Dus er zitten 605 vissen in de vijver.
c Als t heel groot is, is $0{,}74^t \approx 0$. Dan is $9 \cdot 0{,}74^t \approx 0$ en $1 + 9 \cdot 0{,}74^t \approx 1$.
Dus dan is $A \approx \dfrac{1500}{1} = 1500$.
Dus de lijn die het verzadigingsniveau aangeeft is $A = 1500$.
d Los op $\dfrac{1500}{1 + 9 \cdot 0{,}74^t} = 1250$.
Voer in $y_1 = \dfrac{1500}{1 + 9 \cdot 0{,}74^x}$ en $y_2 = 1250$.
Intersect geeft $x \approx 12{,}6$.
$t = 12$ op 1 maart 2017 en $t = 13$ op 1 april 2017.
Dus in maart 2017 zitten er voor het eerst meer dan 1250 vissen in de vijver.

7 **a** $t = 24$ geeft $A = \dfrac{3000}{1 + 100 \cdot 0{,}97^{24}} \approx 61$. Dus ongeveer 61 klanten hadden een account.
b Los op $\dfrac{3000}{1 + 100 \cdot 0{,}97^t} = 2000$.
Voer in $y_1 = \dfrac{3000}{1 + 100 \cdot 0{,}97^x}$ en $y_2 = 2000$.
Intersect geeft $x \approx 173{,}9$, dus na 174 dagen.
c Als t toeneemt, dan neemt $0{,}97^t$ af. Dus ook $1 + 100 \cdot 0{,}97^t$ neemt af, maar blijft positief,
dus $\dfrac{3000}{1 + 100 \cdot 0{,}97^t}$ neemt toe.
Het aantal klanten met een account neemt dus voortdurend toe.
d Als t heel groot is, is $0{,}97^t \approx 0$. Dan is $100 \cdot 0{,}97^t \approx 0$ en $1 + 100 \cdot 0{,}97^t \approx 1$. Dus dan is
$A \approx \dfrac{3000}{1} = 3000$, dus de grenswaarde is 3000.
e $t = 0$ geeft $A \approx 30$ en $t = 120$ geeft $A \approx 837$, dus $g_{120\text{ dagen}} = \dfrac{837}{30} = 27{,}9$ en $g_{\text{dag}} = 27{,}9^{\frac{1}{120}} \approx 1{,}028$.
Het groeipercentage per dag is 2,8%.
f De formule is dan $A = 837 \cdot 1{,}028^t$ met $t = 0$ na 120 dagen.
$365 - 120 = 245$
Het aantal klanten zou dan $837 \cdot 1{,}028^{245} \approx 726\,000$ zijn geweest.

8 **a** $N = \dfrac{42}{t} + 3{,}75 \cdot \ln(t^2) = 42t^{-1} + 7{,}5 \cdot \ln(t)$
$\dfrac{dN}{dt} = -42t^{-2} + \dfrac{7{,}5}{t} = \dfrac{-42}{t^2} + \dfrac{7{,}5t}{t^2} = \dfrac{7{,}5t - 42}{t^2}$
Dus $a = 7{,}5$ en $b = -42$.
b $\dfrac{dN}{dt} = 62{,}12 \cdot \dfrac{1}{(5t^2 - 4{,}8) \cdot \ln(3)} \cdot 10t = \dfrac{621{,}2t}{(5t^2 - 4{,}8) \cdot \ln(3)} \approx \dfrac{565t}{5t^2 - 4{,}8}$
Dus $a = 565$.

Bladzijde 248

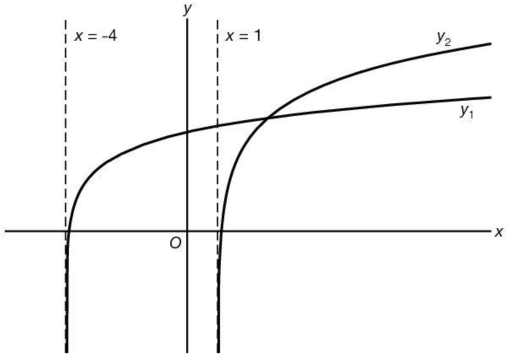
9 **a** $g_{35\text{ weerkaatsingen}} = 0{,}90$, dus $g_{1\text{ weerkaatsing}} = 0{,}90^{\frac{1}{35}} = 0{,}9969...$
$P_S = b \cdot g^t$ met $b = 100$ en $g = 0{,}997$ geeft $P_S = 100 \cdot 0{,}997^n$.

b $n = 15$ geeft $P_S = 95{,}6$, dus 95,6%.
c $n = 20$ geeft $P_S = 94{,}2$, dus er wordt 5,8% geabsorbeerd.
d $g_{7\text{ weerkaatsingen}} = 0{,}75$, dus $g_{1\text{ weerkaatsing}} = 0{,}75^{\frac{1}{7}} = 0{,}9597...$
$P_D = b \cdot g^t$ met $b = 100$ en $g = 0{,}960$ geeft $P_D = 100 \cdot 0{,}960^n$.
e $n = 25$ geeft $P_S = 92{,}8$ en $P_D = 36{,}0$.
Dus er valt $\frac{92{,}8}{36{,}0} \approx 2{,}6$ keer zoveel daglicht binnen.
f Los op $100 \cdot 0{,}960^n = 25$.
Voer in $y_1 = 100 \cdot 0{,}960^x$ en $y_2 = 25$.
Intersect geeft $x \approx 33{,}96$.
Dus na 34 weerkaatsingen.

Bladzijde 249

10 **a** $N = b \cdot g^t$
$\left.\begin{array}{l} t = 4 \text{ en } N = 400 \\ t = 8 \text{ en } N = 800 \end{array}\right\} g_{4\text{ jaar}} = \frac{800}{400}$
$g_{\text{jaar}} = \left(\frac{800}{400}\right)^{\frac{1}{4}} = 1{,}1892...$
$\left.\begin{array}{l} N = b \cdot 1{,}1892...^t \\ t = 4 \text{ en } N = 400 \end{array}\right\} b \cdot 1{,}1892...^4 = 400$
$b = \frac{400}{1{,}1892...^4} \approx 200$
Dus $N = 200 \cdot 1{,}189^t$.
b 3319 ha = 33,19 km^2
Dus er waren toen $40 \cdot 33{,}19 \approx 1328$ damherten.
Los op $200 \cdot 1{,}189^t = 1328$.
Voer in $y_1 = 200 \cdot 1{,}189^x$ en $y_2 = 1328$.
Intersect geeft $x \approx 10{,}94$.
Dus het artikel verscheen eind 2010 of begin 2011.

11 **a** Voer in $y_1 = 2 + {}^3\log(x + 4)$ en $y_2 = 3 + {}^2\log(x - 1)$.



b Intersect geeft $x \approx 2{,}65$ en $y \approx 3{,}72$.
De coördinaten van het snijpunt zijn (2,65; 3,72).
c $x = 6$ geeft $y_1 = 4{,}09...$ en $x = 6$ geeft $y_2 = 5{,}32...$
De lengte van lijnstuk AB is $5{,}32... - 4{,}09... \approx 1{,}23$.
d Voer in $y_3 = 4$.
Intersect y_1 en y_3 geeft $x = 5$, dus $x_P = 5$.
Intersect y_2 en y_3 geeft $x = 3$, dus $x_Q = 3$.
De lengte van lijnstuk PQ is $5 - 3 = 2$.

Bladzijde 250

12 **a** $0{,}67\log(0{,}5E) - 3 = 0$
$0{,}67\log(0{,}5E) = 3$
$\log(0{,}5E) = \frac{3}{0{,}67} = 4{,}47...$
$0{,}5E = 10^{4{,}47...}$
$E = 2 \cdot 10^{4{,}47...} \approx 60000$
De formule geldt voor waarden van E vanaf 60 000.

© Noordhoff Uitgevers bv

b $M = 0{,}67\log\left(0{,}5 \cdot 2 \cdot 10^{18}\right) - 3 = 9{,}06$, dus een beving van 9,1 op de schaal van Richter.

c Los op $0{,}67\log(0{,}5E) - 3 = 2{,}5$

$$0{,}67\log(0{,}5E) = 5{,}5$$
$$\log(0{,}5E) = \frac{5{,}5}{0{,}67} = 8{,}20...$$
$$0{,}5E = 10^{8{,}20...}$$
$$E = 2 \cdot 10^{8{,}20...} \approx 3{,}2 \cdot 10^{8} \text{ joule}$$

d $M(E) = 0{,}67 \cdot \log(0{,}5E) - 3$

$$\begin{aligned} M(2E) &= 0{,}67 \cdot \log(0{,}5E \cdot 2) - 3 \\ &= 0{,}67 \cdot (\log(0{,}5E) + \log(2)) - 3 \\ &= 0{,}67 \cdot \log(0{,}5E) + 0{,}67 \cdot \log(2) - 3 \\ &= M(E) + 0{,}67 \cdot \log(2) \\ &\approx M(E) + 0{,}20 \end{aligned}$$

Dus het getal is 0,20.

e $0{,}67\log(0{,}5E) - 3 = M$

$$0{,}67\log(0{,}5E) = M + 3$$
$$\log(0{,}5E) = \frac{M+3}{0{,}67} = 1{,}49...M + 4{,}47...$$
$$0{,}5E = 10^{1{,}49...M + 4{,}47...}$$
$$E = 2 \cdot (10^{1{,}49...})^{M} \cdot 10^{4{,}47...}$$
$$E \approx 60\,000 \cdot 31^{M}$$

Dus $E = 60\,000 \cdot 31^{M}$.

f $E(M) = 60\,000 \cdot 31^{M}$

$E(M+1) = 60\,000 \cdot 31^{M+1} = 60\,000 \cdot 31^{M} \cdot 31 = 31 \cdot E(M)$

Dus het getal is 31.